PS2315 Abril-Julio 2016
Dpto. Procesos y Sistemas
Universidad Simón Bolívar
Tarea 4

.

- Leer Kamen y Heck: Secciones 1.3, 1.4, 1.5, 6.3, 6.4, 7.3,
- Fecha de entrega: jueves 12 de mayo, al entrar a clases..
- Nota: i) Cada tarea debe estar plenamente identificada con Nombre, Apellido y Carnet.. ii) en cada problema debe mostrarse tanto su enunciado como su solución, ambas bien redactadas y nítidamente presentadas. iii) las tareas son individuales (pueden discutir entre ustedes las soluciones; sin embargo, no se aceptarán soluciones o argumentos "idénticos"). Violación a esta regla implicará NOTA CERO a todos los involucrados sin derecho a reclamo alguno. iv) Todos los problemas de la 2da parte (que implican uso de Scilab) son obligatorios (de lo contrario tendrán CERO en la tarea).

1. **Obligatorio.** (Objetivo de este problema: El estudiante desarrolla y extiende de una manera activa lo aprendido en las clases teóricas) Una operación fundamental en sistemas de control estocástico, y también en sistemas de comunicaciones, es la operación binaria sobre S_e llamada correlación y que se define como: dadas dos señales $f, g \in S_e$, entonces la **correlación cruzada** de f y g (orden es importante) es una "señal" :

$$R_{fg}(\tau) = Ⓢ\int\limits_{\lambda \in T} f(\lambda)\,\overline{g}(\lambda - \tau)\,\mu(\lambda)$$

para todo $\tau \in T$.

Esta operación se emplea, en control y procesamiento digitral de señales, principalmente para determinar las similaridades estructurales entre dos señales dadas f y g. (En lo que sigue suponemos que las señales son reales)

(a) Demuestre que: para todas señales $f, g \in S_e$, y para cada $\tau \in T$

$$R_{fg}(\tau) = f(\tau) * g(-\tau)$$

donde $*$ = convolución.

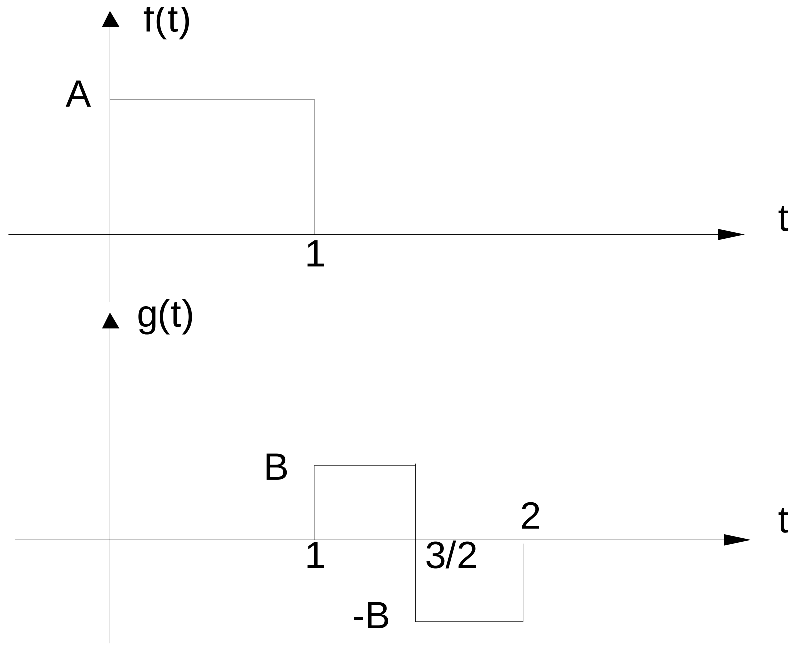
(b) Demuestre que en el dominio frecuencial

$$\widehat{R}_{fg}(\gamma) = \widehat{f}(\gamma)\,\widehat{g}(-\gamma)$$

(c) Demuestre que la señal de correlación no es conmutativa. (O sea, encuentre dos señales $f, g \in S_e$ tales que $R_{fg} \neq R_{gf}$)

(d) Demuestre que la correlación es simétrica (simetría par). O sea, si $f, g \in S_e$, entonces

$$R_{fg}(\tau) = R_{gf}(-\tau), \tau \in T$$



(e) Encuentre la correlación de la señal $f(t)$ y la señal $n(t) = f(t-1) + g(t)$ para $\frac{B}{A} = 0, 0.1$ y 1, donde $f(t)$ y $g(t)$ se muestran en la figura(1e)

(f) Halle:

1. $\|f\|_1, \|f\|_2, \|f\|_\infty$
2. $\|g\|_1, \|g\|_2, \|g\|_\infty$

(g) La autocorrelación es un caso especial de la correlación cruzda cuando $f = g$. Esto es

$$R_f(\tau) = ⓢ \int_{\lambda \in T} f(\lambda) f(\tau + \lambda) \mu(\lambda), \tau \in T.$$

1. Demuestre que
$$energia(f) = R_f(0)$$
y corrobore con los resultados en la parte (e)
2. Demuestre que
$$R_f(\tau) \leq R_f(0), \tau \in T$$
(Recuerde que
$$\left| ⓢ \int_{\lambda \in T} f(\lambda) \mu(\lambda) \right| \leq ⓢ \int_{\lambda \in T} |f(\lambda)| \mu(\lambda)$$
)
3. Demuestre que la autocorrelación de $z(\lambda) = f(\lambda) + g(\lambda), \lambda e T$, es
$$R_z(\tau) = R_f(\tau) + R_g(\tau) + R_{fg}(\tau) + R_{gf}(\tau), \tau \in T.$$

2. Considere un sistema P, con entrada $u \in U$, y salida $y \in Y$, relacionada por: $\lambda \in T, y(\lambda) = P[u](\lambda) = \circledS \int\limits_{\tau \in T} h(\lambda - \tau)\, u(\tau)\, \mu(\tau)$

   (a) Demuestre que
   $$R_y(\tau) = R_u(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$$

   (b) Demuestre que si $\lambda = t$, entonces
   $$\widehat{R}_y(j\omega) = \left|\widehat{h}(j\omega)\right|^2 \widehat{R}_u(j\omega), \omega \in (-\infty, +\infty)$$

   y si $\lambda = k$, entonces
   $$\widehat{R}_y\left(e^{j\omega}\right) = \left|\widehat{h}\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 \widehat{R}_u\left(e^{j\omega}\right), \omega \in (-\pi, \pi)$$

3. Demuestre que el sistema
   $$\begin{aligned} P &: U \to Y \\ y &= P(u) \end{aligned}$$
   dado por
   $$y(\lambda) = P[u](\lambda) = u(\lambda - 5) - u(3 - \lambda), \lambda \in T$$
   es lineal, no causal. ¿Es invariante en el tiempo? ¿Por qué?

4. Demuestre que el sistema
   $$\begin{aligned} P &: U \to Y \\ y &= P(u) \end{aligned}$$
   dado por
   $$y(\lambda) = P[u](\lambda) = \lambda u(\lambda), \lambda \in T$$
   es lineal, causal, variante en el tiempo y algebraico.

5. (aplicación propiedades de la TL y TLI) Suponga que tiene un sistema
   $$\begin{aligned} P &: U \to Y \\ y &= P(u) \end{aligned}$$
   descrito por
   $$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) \\ x\left(0^-\right) &\in R^2 \end{aligned}$$

   (a) Usando transformada de Laplace, determine $y(t)$ si $x(0^-) = 0$ y $u(t) = 2esc(t)$

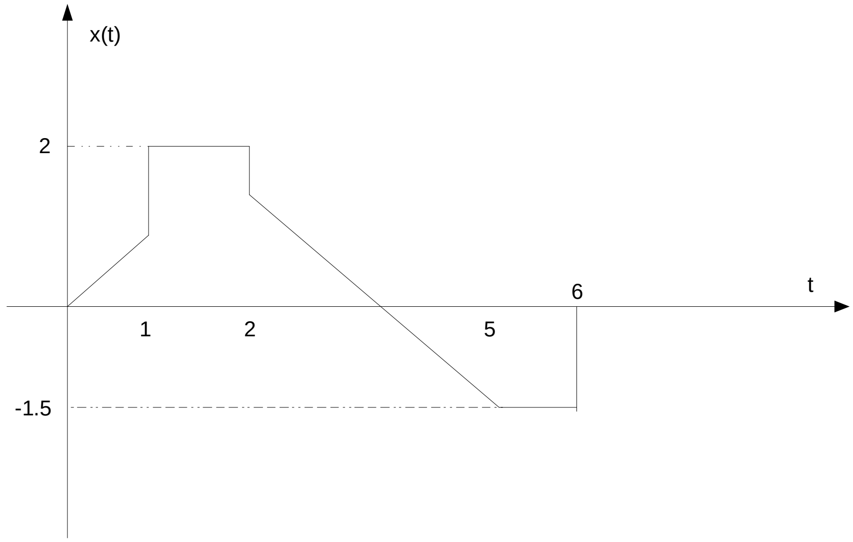


Figure 1: Señal de tiempo continuo

(b) Usando transformada de Laplace, determine $y\left(t\right)$ si $x\left(0^{-}\right)=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ y $u\left(t\right)=0$

(c) Usando transformada de Laplace, determine $y\left(t\right)$ si $x\left(0^{-}\right)=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ y $u\left(t\right)=2esc\left(t\right)$

6. Considere la señal de tiempo continuo $x\left(t\right)$ mostrada en la figura (1)
   Determine $\left\Vert x\right\Vert_2, \left\Vert x\right\Vert_1$ y $\left\Vert x\right\Vert_\infty$

7. Para los sistemas P de tiempo discreto

$$\begin{aligned} P &: U\rightarrow Y \\ y &= P\left(u\right) \end{aligned}$$

$$y\left(k\right)=P\left[u\right]\left(k\right), k\in Z$$

que se muestran a continuación, determine si tienen memoria, si son lineales, causales o invariantes en el tiempo:

(a) $y\left(k\right)=\log\left[u\left(k\right)\right]$
(b) $y\left(k\right)=u\left(k\right)u\left(k-2\right)$
(c) $y\left(k\right)=3ku\left(k\right)$
(d) $y\left(k\right)=ku\left(k\right)+3$
(e) $y\left(k\right)=u\left(k-1\right)$
(f) $y\left(k\right)=u\left(k\right)+2u\left(k-1\right)$
(g) $y\left(k\right)=\sum_{\tau=0}^{k}u\left(\tau\right)$
(h) $y\left(k\right)=\sum_{\tau=0}^{\infty}u\left(\tau\right)$

(i) $y(k) = \frac{1}{N}\sum_{\tau=0}^{N-1} u(k-\tau)$

(j) $y(k) = \frac{1}{2N+1}\sum_{\tau=-N}^{N} u(k-\tau)$

8. **Obligatorio cada una de sus partes:** Usando Scilab grafique los diagramas de Bode (Amplitud y Fase) de cada una de las señales "causales" $h(t)$ cuya transformada de laplace es

   (a) $\widehat{h}(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$

   (b) $\widehat{h}(s) = \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)}$

   (c) $\widehat{h}(s) = \frac{s(2s+1)}{(s+1)(s+2)}$

   (d) $\widehat{h}(s) = \frac{2s+1}{(s+1)^2(s+2)}$

   (e) $\widehat{h}(s) = \frac{2s+1}{(s+1)^3(s+2)}$

   (f) $\widehat{h}(s) = \frac{2}{[s^2+0.4s+2]}$

   En cada caso determine h_{dc}, $\left\|\widehat{h}\right\|_\infty$ y la frecuencia de ancho de banda ω_b en rad/seg. (en los diagramas $\omega \in (0.01, 100)$)

9. Usando Scilab grafique los diagramas de Bode (Amplitud y Fase) de cada una de las señales "causales" $h(k)$ cuya transformada Z es

   (a) $h(z) = \frac{2z}{(z+1)(z+2)}$

   (b) $\widehat{h}(z) = \frac{(2z+1)z}{(z+1)(z+2)}$

   (c) $\widehat{h}(z) = \frac{z(2z+1)}{(z+1)(z+2)}$

   (d) $\widehat{h}(z) = \frac{(2z+1)z}{(z+1)^2(z+2)}$

   (e) $\widehat{h}(z) = \frac{(2z+1)z}{(z+1)^3(z+2)}$

   En cada caso determine h_{dc}, $\left\|\widehat{h}\right\|_\infty$ y la frecuencia de ancho de banda ω_b en rad/seg.(en los diagramas $\omega \in (0.01, 100)$)

10. Nos dicen que un sistema P de tiempo discreto

$$\begin{aligned} P &: U \to Y \\ y &= P(u) \end{aligned}$$

$$y(k) = P[u](k), k \in Z$$

es **lineal e invariante en el tiempo** y si la entrada es

$$u(k) = \begin{cases} 1 & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

entonces la salida generada, $y = P[u]$, es

$$y(k) = P[u](k) = \begin{cases} |n| & k = n \\ |n+1| & k = n+1 \\ 0 & k \notin \{n, n+1\} \end{cases}$$

para todo $n \in Z$.

(a) Determine la salida, y, del sistema P generada por la entrada

$$u(k) = \begin{cases} -2 & k = -1 \\ 2 & k = 0 \\ -2 & k = 1 \\ 0 & k \notin \{-1, 0, 1\} \end{cases}$$

(b) Si la salida y ante una entrada u es

$$y(k) = \begin{cases} 3 & k = -1 \\ 0 & k \neq -1 \end{cases}$$

cuando $u(k) = 0, k < 0$ (u es causal), determine $u(0), u(1), u(2), u(3)$ y $u(4)$.

(c) ¿Es el sistema P causal?